Frações Parciais

sexta-feira, 15 de março de 2024 14:39

Seja $f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^n}$; $n \in \mathbb{N}^*$; $a \in \mathbb{C}$; $f(x)$ é uma função racional $\forall x \in \mathbb{C}$.
$f(a) \neq 0$ e $f(x)$ analítica em a.

neste caso, podemos escrever:

$$f(x) = \frac{\alpha_1}{(x-a)} + \frac{\alpha_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{(x-a)^n} + g'(x)$$

sendo $g'(a) \neq 0$ e $g'(x)$ analítica em a.

Observe que,

$$f(x)(x-a)^n = g(x) = (x-a)^{n-1}\alpha_1 + (x-a)^{n-2}\alpha_2 + \ldots + \alpha_n + (x-a)^n g'(x)$$

$$\therefore g(a) = \alpha_n$$

Por outro lado, sendo $f(x)$ racional e contínua em $\mathbb{C} \setminus \{f\}$

$$\frac{d\,g(x)}{dx} = (n-1)(x-a)^{n-2}\alpha_1 + (n-2)(x-a)^{n-3}\alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} + n(x-a)^{n-1}g'(x) + (x-a)^n \frac{dg'(x)}{dx}$$

$$\therefore \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=a} = \alpha_{n-1}$$

Analogamente,

$$\left.\frac{d^2 g(x)}{dx^2}\right|_{x=a} = 2!\,\alpha_{n-2} \quad \ldots \quad \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} g(x) = (n-1)!\,\alpha_1$$